РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ Z-ПАРАМЕТРОВ

Савин А.А.*, Губа В.Г.**, Быкова О.Н.**

* ФГБОУ ВПО «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники», 634050, Томск, Россия

** ООО «НПК ТАИР», 634041, Томск, Россия

I РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Входное сопротивление ($Z_{11} = Z_{BX}$) рассчитывается по формуле:

$$Z_{BX} = Z_0 \cdot (1 + \Gamma_M) \big/ (1 - \Gamma_M), \tag{1}$$

где Z_0 – опорное сопротивление (часто 50 Ом); Γ_M – измеренное значение коэффициента отражения (КО). Запишем аналитическое выражение производной по Γ_M при расчете входного сопротивления по формуле (1):

$$J = 2Z_0 \big/ (1 - \Gamma_M)^2 . \tag{2}$$

Тогда дисперсию измерений входного сопротивления можно вычислить при известной дисперсии измерений КО $D_{\Delta\Gamma}$ с помощью выражения:

$$D_Z = J \cdot D_{\Delta\Gamma} \cdot J^{\mathrm{H}}, \tag{3}$$

где Н – оператор эрмитова сопряжения (в скалярном случае комплексное сопряжение). Дисперсию измерений КО можно рассчитать из максимальной погрешности измерения модуля КО $\left|\Delta\Gamma_{MAX}\right|$:

$$D_{\Delta\Gamma} = \frac{\left|\Delta\Gamma_{MAX}\right|^2}{k}, \tag{4}$$

где k – коэффициент пересчета, равный 3 при предположении о равномерном законе распределения погрешности измерений и 9 при гауссовском. Подставляя (4) и (2) в (3), получим

$$D_Z = \frac{4Z_0^2 \cdot \left|\Delta\Gamma_{MAX}\right|^2}{\left|1-\Gamma_M\right|^4 \cdot k}. \tag{5}$$

Максимальную погрешность можно рассчитать по формуле:

$$\Delta Z_{MAX} = \sqrt{k} \cdot \sigma_Z = \frac{2Z_0 \cdot \left|\Delta\Gamma_{MAX}\right|}{\left|1-\Gamma_M\right|^2}, \tag{6}$$

где $\sigma_Z = \sqrt{D_Z}$ – среднеквадратическое значение погрешности измерения входного сопротивления.

II РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ МАТРИЦЫ Z-ПАРАМЕТРОВ

Аналогичные рассуждения можно провести для матрицы Z-параметров четырехполюсника. Приведем известные соотношения:

$$Z_{11} = Z_0 d \cdot \left[(1+S_{11})(1-S_{22}) + S_{12}S_{21}\right], \tag{7}$$

$$Z_{21} = Z_0 d \cdot 2S_{21}, \tag{8}$$

$$Z_{22} = Z_0 d \cdot \left[(1+S_{22})(1-S_{11}) + S_{12}S_{21}\right], \tag{9}$$

$$Z_{12} = Z_0 d \cdot 2S_{12}, \tag{10}$$

где коэффициент

$$d = 1\big/\left[(1-S_{11})(1-S_{22}) - S_{12}S_{21}\right]. \tag{11}$$

Введем векторы $\mathbf{Z} = \left[Z_{11} \quad Z_{21} \quad Z_{22} \quad Z_{12}\right]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{S} = \left[S_{11} \quad S_{21} \quad S_{22} \quad S_{12}\right]^{\mathrm{T}}$. Тогда в векторно-матричной форме можно записать:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{f}\left(\mathbf{S}\right), \tag{12}$$

где $\mathbf{f}$ – известная по (7) – (10) нелинейная вектор-функция:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = Z_0 \cdot \begin{bmatrix} \left[(1+S_1)(1-S_3) + S_4S_2\right]\big/\left[(1-S_1)(1-S_3) - S_4S_2\right] \\ 2S_2\big/\left[(1-S_1)(1-S_3) - S_4S_2\right] \\ \left[(1+S_3)(1-S_1) + S_4S_2\right]\big/\left[(1-S_1)(1-S_3) - S_4S_2\right] \\ 2S_4\big/\left[(1-S_1)(1-S_3) - S_4S_2\right] \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где S_1=S_{11}, S_2=S_{21}, S_3=S_{22}, S_4=S_{12} – элементы вектора $\mathbf{S}$.

Обозначим ковариационную матрицу погрешности измерений S-параметров через $\mathbf{V}_\mathrm{S}$. Для нахождения $\mathbf{V}_\mathrm{S}$ можно использовать известные максимальные значения погрешности измерения модулей коэффициента отражения $\left|\Delta S_{MAX}^{ii}\right|$ и передачи $\left|\Delta S_{MAX}^{ij}\right|$. Предполагая отсутствие корреляции между измерениями S-параметров, получим соотношение:

$$\mathbf{V_S} = \frac{1}{k} \cdot \begin{bmatrix} \left|\Delta S_{MAX}^{11}\right|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left|\Delta S_{MAX}^{21}\right|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left|\Delta S_{MAX}^{22}\right|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left|\Delta S_{MAX}^{12}\right|^2 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где k – коэффициент пересчета, равный 3 при предположении о равномерном законе распределения погрешности измерений и 9 при гауссовском.

Тогда ковариационная матрица погрешности определения вектора Z-параметров приближенно равна:

$$\mathbf{V_Z} = \mathbf{J_f} \cdot \mathbf{V_S} \cdot \mathbf{J_f^{\mathrm{H}}}, \tag{15}$$

где $\mathbf{J}$ – матрица Якоби, Н – оператор эрмитова сопряжения (в векторном случае комплексное сопряжение и транспонирование). Элемент i-ой строки j-го столбца матрицы Якоби определяется как:

$$\mathbf{J_f^{\mathit{ij}}} = \partial f_i \big/ \partial S_j, \tag{16}$$

причем значение производной определяется в точке, соответствующей измерениям. В рассматриваемой задаче матрица Якоби имеет размерность 4x4. Запишем аналитическое выражение матрицы Якоби:

$$\begin{gathered}\mathbf{J_f} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial S_1 & \partial f_1/\partial S_2 & \partial f_1/\partial S_3 & \partial f_1/\partial S_4 \\ \partial f_2/\partial S_1 & \partial f_2/\partial S_2 & \partial f_2/\partial S_3 & \partial f_2/\partial S_4 \\ \partial f_3/\partial S_1 & \partial f_3/\partial S_2 & \partial f_3/\partial S_3 & \partial f_3/\partial S_4 \\ \partial f_4/\partial S_1 & \partial f_4/\partial S_2 & \partial f_4/\partial S_3 & \partial f_4/\partial S_4 \end{bmatrix} = \\ = p \cdot \begin{bmatrix} 2\left(S_3 - 1\right)^2 & -2S_4\left(S_3 - 1\right) & 2S_2S_4 & -2S_2\left(S_3 - 1\right) \\ -2S_2\left(S_3 - 1\right) & 2\left(S_1 - 1\right)\left(S_3 - 1\right) & -2S_2\left(S_1 - 1\right) & 2S_2^2 \\ 2S_2S_4 & -2S_4\left(S_1 - 1\right) & 2\left(S_3 - 1\right)^2 & -2S_2\left(S_1 - 1\right) \\ -2S_4\left(S_3 - 1\right) & 2S_4^2 & -2S_4\left(S_1 - 1\right) & 2\left(S_1 - 1\right)\left(S_3 - 1\right) \end{bmatrix},\end{gathered} \tag{17}$$

где коэффициент $p = Z_0 \big/ \left[(1 - S_1)(1 - S_3) - S_4S_2\right]^2$.

Элементы матрицы $\mathbf{V}_\mathbf{Z}$, которые находятся вне главной диагонали, характеризуют степень статистической зависимости оценок *Z*-параметров. Для расчета максимальных погрешностей оценок Z-параметров следует использовать только диагональные элементы матрицы $\mathbf{V}_\mathbf{Z}$:

$$\Delta Z_{MAX} = \sqrt{k} \cdot \sqrt{V_\mathbf{Z}^{ii}}, \tag{18}$$

где $V_\mathbf{Z}^{ii}$ – элемент *i*-ой строки *i*-го столбца матрицы $\mathbf{V}_\mathbf{Z}^{ii}$. С учетом введенного обозначения вектора $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{21} & Z_{22} & Z_{12} \end{bmatrix}^\mathrm{T}$, при расчете максимальной погрешности для Z_{11} используется *i*=1, для Z_{21} используется *i*=2, для Z_{22} используется *i*=3, и для Z_{12} используется *i*=4.

Дополнительную информацию можно найти в [1] – [4].

ЛИТЕРАТУРА

1 D.F. Williams, A. Lewandowski, P.D. Hale, C.M. Wang, A. Dienstfrey Covariance-Based Vector-Network-Analyzer Uncertainty Analysis for Time- and Frequency-Domain Measurements // *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques,* vol. 58, no. 7, pp. 1877-1886, July 2010.

2 A.A. Savin, V.G. Guba, B.D. Maxson Covariance Based Uncertainty Analysis with Unscented Transformation //*82nd ARFTG Microwave Measurement Conference,* Nov. 2013, USA, pp. 15-19.

3 А.А. Савин, В.Г. Губа Определение уровня остаточной систематической погрешности векторного анализатора цепей после выполнения однопортовой калибровки // Вестник метролога. – 2009. – № 4. – с. 16-21.

4 В.Г. Губа, А.А. Савин Анализ погрешности векторного анализатора цепей при расчете Z-параметров с использованием ковариационных матриц // 24-я Международная конференция КрыМиКо-2014, Севастополь, Россия, 2014.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Фрагмент кода MATLAB для расчета производных:

```
clear all; clc;
syms S1 S2 S3 S4 Z1 Z2 Z3 Z4;
Z1 = ((1+S1)*(1-S3)+S4*S2)/((1-S1)*(1-S3)-S4*S2);
Z2 = 2*S2/((1-S1)*(1-S3)-S4*S2);
Z3 = ((1+S3)*(1-S1)+S4*S2)/((1-S1)*(1-S3)-S4*S2);
Z2 = 2*S2/((1-S1)*(1-S3)-S4*S2);
simplify(diff(Z1, S1))
```